Jacek Cichoń

Katedra Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

MAP3045: Analiza Matematyczna 1.2

Wykład przeznaczony jest dla studentów I roku I stopnia Inżynierii Biomedycznej na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki. Odbywa się w środy w godz. 11:15 - 13:00 w sali 1.28 (C-13).

Na stronie tej znajdziesz informacje o zasadach zaliczenia, realizowanym materiale, literaturze oraz listę zadań.

Obecność na wykładzie jest obowiązkowa, ale raczej nie będzie sprawdzana :--). Ale uważajcie: program kursu jest jest dość obszerny. Musicie systematycznie pracować. Jeśli opuścicie jakichkolwiek zajęcia, to musicie je natychmiast samodzielnie nadrobić.

Zasady zaliczania kursu

Ćwiczenia

Na ćwiczeniach odbędą się trzy 30 minutowe kolokwia. Na każdym z nich dostaniecie do zrobienia 3 zadania. Za każde z nich będziecie mogli otrzymać do 5 punktów. Za aktywność można uzyskać dodatkowo do 15 punktów. Ocena końcowa z ćwiczeń będzie wystawiana za pomocą następującej tabelki:

Pkt.	0...14	15..20	21..26	27..32	33..39	40..45	46..60
C	2.0	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5

Ćwiczenia do wykładu prowadzą: dr. K. Majcher, dr R. Rałowski, dr S. Żeberski oraz dr hab. prof. J. Własak.

Egzamin

1. 1. Egzamin podstawowy: 28.01.2016, godz. 11:00 - 13:00, sala 322/A-1
   2. Egzamin poprawkowy: 11.02.2016, godz. 11:00 - 13:00, sala 322/A-1
2. Osoby, które otrzymają z egzaminu ocenę 5.0 będa mogły poprawić ją na ocenę 5.5. W tym celu będą musiały się umówić ze mną na krótkie spotkanie.
3. Do egzminu poprawkowego przystąpić mogą tylko te osoby, które z egzaminu w pierwszym terminie otrzymały ocenę ndst.

Sposób oceniania i ocena końcowa

Na egzaminie dostaniecie do zrobienia 6 zadań. Za każde z nich będziecie mogli otrzymać do 5 punktów. Ocena z egzaminu będzie wystawiana za pomocą następującej tabelki:

Pkt.	0..7	8..10	11..15	16..20	21..25	26..30
E	2.0	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0

Na egzaminie możecie korzystać ze swoich notatek. Nie wolno posługiwać się internetem. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie: jeśli zostaniecie złapanie na ściąganiu, to otrzymacie ocenę ndst.
Przykładowe zadania na egzamin: **Przykład.pdf**.
Obowiązujący materiał:

1. to co zostało omówione na wykładzie
2. wszystko co znajduje się na tej stronie
3. wszystko co było omówione na środowych **dodatkowych zajęciach** z matematyki.

Na egzamin proszę przynieść kilka kartek papieru. Będzie musieli znać swój numer indeksu.
Powodzenia.

Wyniki pierwszego egzaminu

Egzamin poszedł wam bardzo dobrze!!! Oceny wpisałem do systemu w sobotę 30.01.2016 około godziny 13:00. Zaledwie kilka osób nie zaliczyło.
Aby otrzymać ocenę celującą trzeba było otrzymać ocenę bdb (zgodnie z tabelką, która znajduje się na tej stronie) oraz bez żadnych rachunków rozwiązać Zadanie 6 (oblicz całkę $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+1)\sin(x)dx$), gdyż wystarczyło zauważyć, że funkcja $f(x)=(x^2+1)\sin(x)$ jest nieparzysta, więc dla dowolnego a mamy $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
Osoby, które nie mają wpisanej oceny do systemu Edukacja.CE muszą pojawić na drugim egzaminie w dniu 11.02.2016.

W poniedziałek 01.02.2016 umówiony byłem z paroma osobami na ewentualne poprawienie oceny z 5.0 na 5.5. Ale nikt się nie pojawił. Tak na wszelki wypadek: ja urzęduję w pokoju 214B/D-1.
Na tej "poprawce" dostaniecie jedno nieco trudniejsze zadanie niż te, które były na egzaminie i będziecie mieli 15 minut czasu na jego rozwiązanie.

Literatura

- Podstawowa
  1. F. Leja, Rachunek Różniczkowy i Całkowy, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012
  2. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza Matematyczna w Zadaniach, Cz. I, PWN, Warszawa 2006
- Pomocnicza
  1. K. Kuratowski, Rachunek Różniczkowy i Całkowy. Funkcje Jednej Zmiennej, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012
  2. G. M. Fichtenholz, Rachunek Różniczkowy i Całkowy, T. I-II, PWN, Warszawa 2007
  3. M. Zakrzewski, "Markowe Wyklady z Matematyki, analiza", wydanie I, Wroclaw 2013, Oficyna Wydawnicza GiS
- Lista zadań: **Analiza1_20015_IB.pdf**.
- Przykładowa lista zadań na pierwsze kolokwium: **Analiza1_20015_IB_K1.pdf**
- Pytania do mnie związane z kursem: **QandA**

Zagadnienia omówione na wykładzie

[07-10-2015] Logika i zbiory

1. Spójniki logiczne i pojęcie tautologii.
2. Najważniejsze tautologie
   1. $\neg\neg p \leftrightarrow p$
   2. $p \vee \neg p$, $\neg(p \wedge \neg p)$
   3. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$, $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   4. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
   5. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ [prawa de Morgana]
3. Zasada Ekstensjonalności: Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x mamy $(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
4. Def. $(x \in A \cup B) \leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$
5. Def. $(x \in A \cap B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$
6. Def. $(x \in A \setminus B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$
7. Def. Dla $A \subseteq \Omega$ określamy $A^c = \Omega \setminus A$
8. Podstawowe prawa:
   1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
   2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ [prawa de Morgana]
9. Formuła zdaniowa o dziedzinie Ω: przyporządkowanie ϕ elementom zbioru Ω wartości logicznych
10. Przekład: $\{x \in \mathbf{R} : (0 < x) \wedge (x \leq 1)\} = (0, 1]$

Materiały pomocnicze: rozdziały I, II z książki **Wykłady ze Wstępu do Matematyki**

[14-10-2015] Liczby rzeczywiste

1. Kwantyfikatory: jeśli ϕ jest formułą zdaniową o dziedzinie Ω, to
   1. $(\forall x)\phi(x) \equiv$ dla wszystkich $x \in \Omega$ mamy $\phi(x) = (1)$,
   2. $(\exists x)\phi(x) \equiv$ istnieje $x \in \Omega$ takie, że $\phi(x) = (1)$.
2. Wzory: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
3. Symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k1(n-k)!}$.
4. Wzór dwumianowy Newona:
5. $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
6. Trójkąt Pascala.
7. Funkcja kwadratowa: $f(x) = ax^2 + bx + c$; wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.
8. Nierówność Cauchy'ego:

9. $$|x_1y_1+\ldots+x_ny_n| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2}$$

10. Pojęcie ograniczenia dolnego i górnego podzbioru liczb rzeczywistych.
11. Def. $\alpha = \sup(A)$ jeśli $(\forall x \in A)(x \leq \alpha)$ oraz $(\forall \beta < \alpha)(\exists x \in A)(\beta < x)$.
12. Zasada zupełności: Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma supremum.
13. Tw. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry.

Materiały pomocnicze: rozdział III z książki **Wykłady ze Wstępu do Matematyki**

[21-10-2015] Ciągi

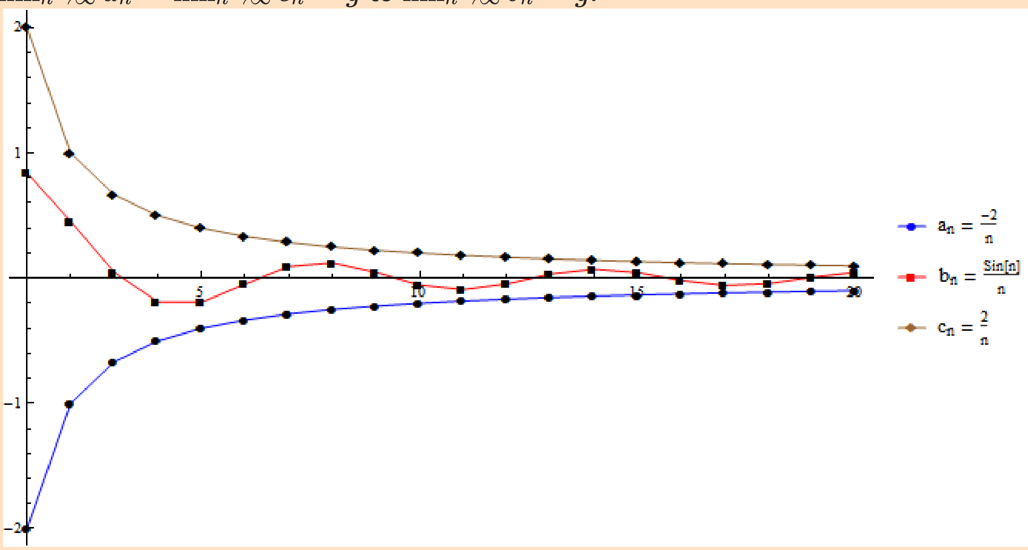
1. Nierówność trojkąta: $|x+y| \leq |x|+|y|$.
2. Nierówność Bernouliego: jeśli $x > -1$ to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(1+x)^n \geq 1+nx$.
3. Pojęcie ciągu rosnącego, niemalejącego, malejącego i nierosnącego.
4. Metody sprawdzania monotoniczności ciągu (a_n): (1) zbadaj $a_{n+1}-a_n$; (2) zbadaj $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
5. Definicja (granica ciągu):
6. $$(\lim_{n\to\infty} a_n = g) \equiv (\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(|a_n - q| < \epsilon)$$
7. Fakt: $\lim_{n\to\infty} c = c$
8. Tw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
9. Tw. Jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne, to
   1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
   2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$
   3. jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
10. Przykład: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \ldots = \frac{1}{2}$.
11. Tw. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ to $\alpha = \beta$.
12. Tw. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oraz (b_n) jest podciągiem ciągu (a_n) to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.
13. Przykład: ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny, gdyż $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$.

[28-10-2015] Ciągi: II

1. Definicja:
2. $$(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty) \equiv (\forall C)(\exists N)(\forall n > N)(a_n > C)$$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty) \equiv (\forall C)(\exists N)(\forall n > N)(a_n < C)$$

3. Fakt: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
4. Fakt: Jeśli $(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty)$ oraz $(\forall n)(a_n \leq b_n)$, to $(\lim_{n\to\infty} b_n = \infty)$
5. [Reguły postepowania z nieskończonościami]
   - $\infty \cdot \infty = \infty$
   - Jeśli $a > 0$, to $a \cdot \infty = \infty$
   - $\frac{a}{\infty} = 0$
   - $\infty \cdot 0$ nie jest określone
   - $\infty - \infty$ nie jest określone
   - $\frac{\infty}{\infty}$ nie jest określone
6. Przykład:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(n+\frac{2}{n})} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$
7. Przykład:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})} = \frac{\infty}{1} = \infty\,.$$
8. Tw. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
9. Tw. **Jeśli ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony to jest zbieżny.**
10. **Twierdzenie o trzech ciągach** Jeśli $(\forall n)(a_n \leq b_n \leq c_n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.



11. Przykład: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 3^n} = 5$
12. Tw.
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ rozbieżny & : \quad q < -1 \end{cases}$$

[28-10-2015] Ciągi: III

1. Przykład: $\lim_n \frac{\sin(n)}{n} = 0$

2. Przykład: $\lim_N \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$
3. Tw: Jeśli $q \neq 1$ to $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
4. Przykład: $\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k} = 2$
5. Tw.

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ 1 & : \quad a = 0 \\ 0 & : \quad a < 0 \end{cases}$$

6. Tw. Ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczonyz góry przez liczbę 3
7. Def.
8. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

   $e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369\ldots$
9. Tw. $(\forall a)(\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a)$

Granica funkcji

Niech $f : A \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$, jeśli dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że

1. $(\forall n)(a_n \in A)$
2. $(\forall n)(a_n \neq x_0)$
3. $\lim_n a_n = x_0$

mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g\ .$$

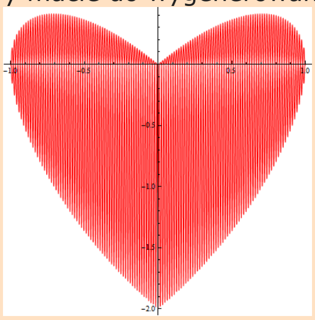
Przykład: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

[28-10-2015] Ciągłość

1. Def. Funkcja f jest ciągła w punkcie a jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = a.$
2. Def. Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.
3. Przykład: Funkcje $f(x) = x$ i $g(x) = c$ są ciągłe.

4. Tw: :$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
5. Tw: :$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
6. Tw: :$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, o ile $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
7. Wniosek: Jeśli funkcje f i g są ciągłe, to $f+g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ są ciągłe.
8. Wniosek: Wszystkie wielomiany są ciągłe.
9. Wniosek: Wszystkie funkcje wymierne są ciągłe.
10. Tw (Własność Darboux fukcji ciągłej). Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, $f(a)<0$ oraz $f(b)>0$ to istnieje $c\in(a,b)$ takie, że $f(c)=0$
11. Def. $\lim_{x\to a+} f(x) = g$ jest dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że $(\forall n)(a_n > a)$ oraz $\lim_n a_n = a$ mamy $\lim_n f(a_n) = g$.

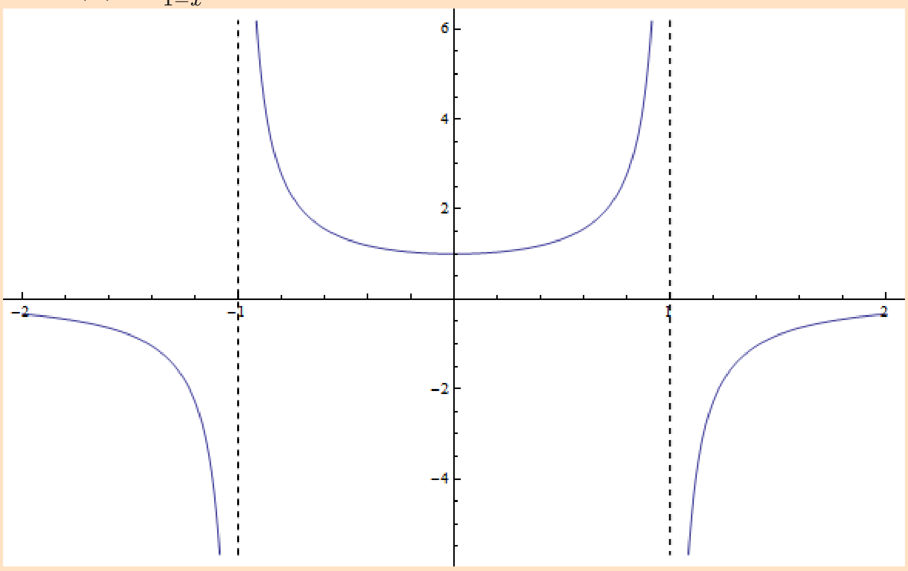
A to jest jeden z wykresów, który macie do wygenerowania (lista zadań):



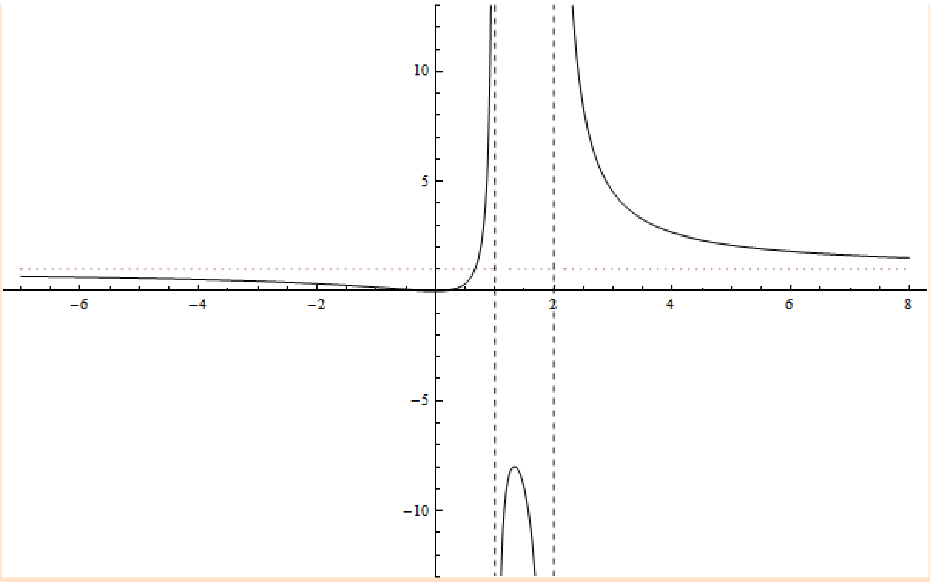
.

[18-11-2015] Wykresy funkcji

1. Tw. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h)$.
2. Przykład: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

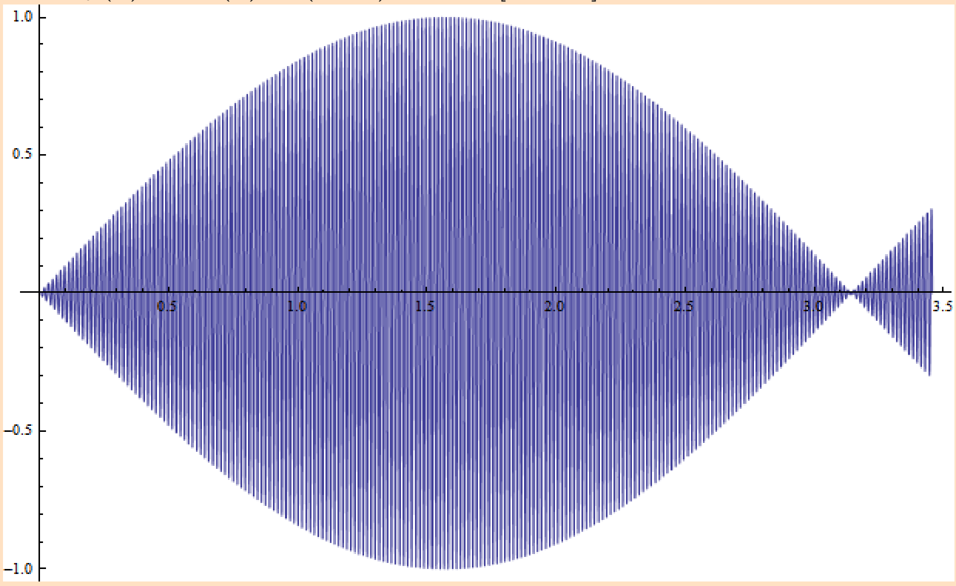


3. Def: Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest **rosnąca** na odcinku (a,b) jeśli dla dowolnych x,y takich, że $a<x<y<b$ mamy $f(x)<f(y)$.
4. Def: Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest **malejąca** na odcinku (a,b) jeśli dla dowolnych x,y takich, że $a<x<y<b$ mamy $f(x)>f(y)$.
5. Def: Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma **lokalne minimum** w punkcie a jeśli istnieje $\epsilon>0$ takie, że dla dowolnego x takiego, że $0<|x-a|<\epsilon$ mamy $f(x)>f(a)$.
6. Def: Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma **lokalne maksimium** w punkcie a jeśli istnieje $\epsilon>0$ takie, że dla dowolnego x takiego, że $0<|x-a|<\epsilon$ mamy $f(x)<f(a)$.
7. Przykład: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

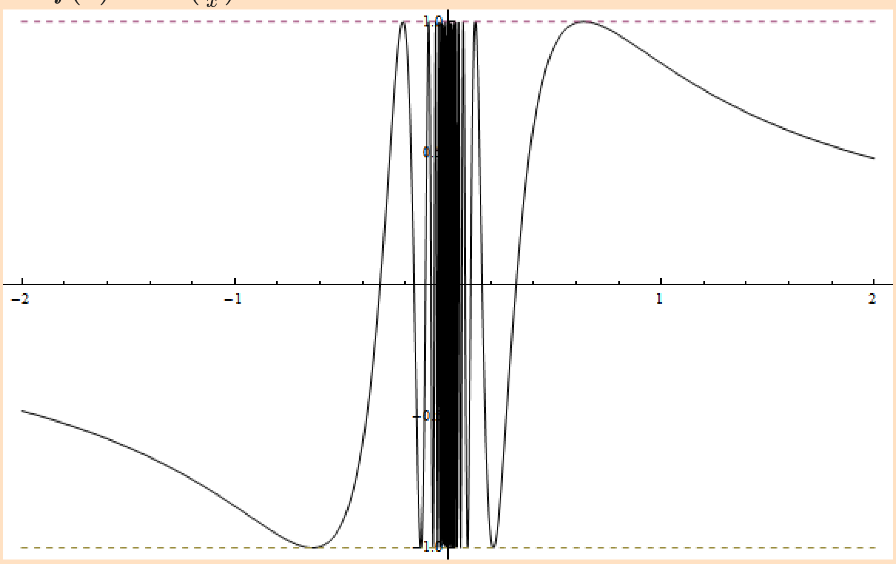


Funkcja ta ma asymptotę poziomą o równaniu $y = 1$ oraz asymptoty pionowe w punktach $x = 1$ oraz $x = 2$.

8. Przykład: $f(x) = \sin(x)\sin(400x)$ dla $x \in [0, 1.1\pi]$



9. Przykład: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$



Funkcja ta ma nieciągłość nieusuwalną w punkcie $x = 0$.

10. Funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie.

[25-11-2015] Ciągłość i różniczkowanie

1. Tw.Jeśli f jest ciągła w punkcie a oraz g jest ciągła w punkcie $f(a)$, to złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie a.
2. Wniosek: złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.
3. Pojęcie funkcji odwrotnej.
4. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to funkcja f^{-1} też jest ciągła
5. Przykład: Funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ jest ciągła.
6. Tw. [Weierstrass] Jeśli $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $x_0 \in [a, b]$ taki, że $(\forall x \in [a, b])(f(x) \leq f(x_0))$.
7. Pochodna:
8. $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
9. Interpretacja: **aplet**
10. Przykłady: $(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^n)' = nx^{n-1}$
11. Tw. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
12. Tw. $(a \cdot f)' = af'$
13. Tw. $(f + g)' = f' + g'$
14. Przykład: Jeśli $s(t)$ oznacza odległość w czasie t, to $s'(t)$ interpretujemy jako prędkość w chwili t, oraz $s''(t)$ jako przyśpieszenie w chwili t.
15. Przykład - cd: Jeśli $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$, to $s'(t) = gt + v_0$ oraz $s''(t) = g$ (jest to ruch jednostajnie przyśpieszony).

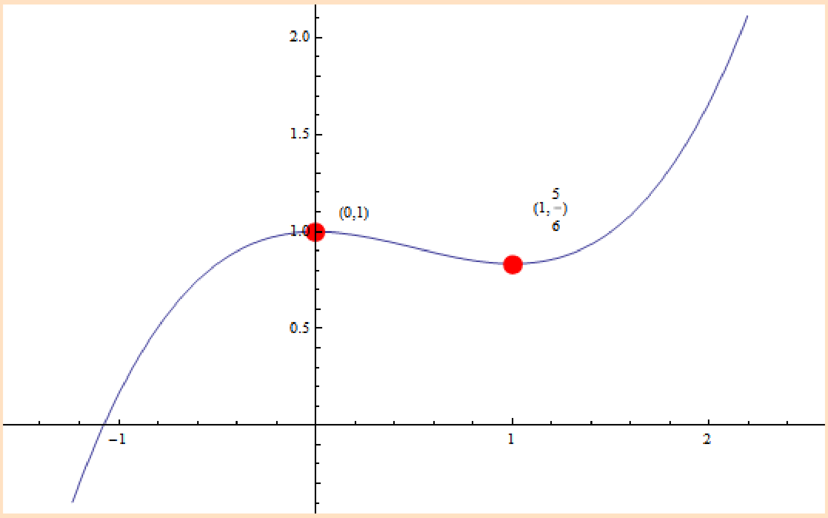
[02-12-2015] Pochodne

1. Tw.Jeśli f jest rózniczkowalna w punkcie A to jest ciągła w punkcie a
2. różniczkowalność $\to$ ciągłość
3. Przykład: Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w każdym punkcie, ale nie jest różniczkowalna w punkcie 0.
4. Tw. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. Tw. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6. Tw. Jeśli f ma ekstremum lokalne w punkcie c oraz jest różniczkowala w punkcie c, to $f'(c) = 0$
7. Tw. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $f(a) = f(b) = 0$ oraz jest różniczkowalna na (a, b) to istnieje $c \in (a, b)]$ takie, że $f'(c) = 0$.
8. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz jest różniczkowalna na (a, b) to istnieje takie $c \in (a, b)]$, że

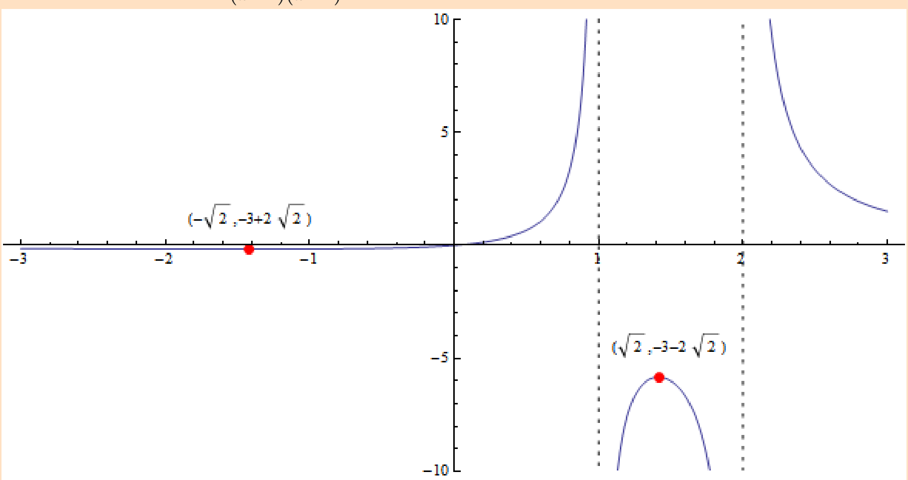
9. $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

10. Wniosek: Jeśli $(\forall x \in (a,b))(f'(x)>0)$, to f jest rosnąca na odcinku (a,b)
11. Wniosek: Jeśli $(\forall x \in (a,b))(f'(x)<0)$, to f jest malejąca na odcinku (a,b)
12. Przykład. Niech $f(x)=ax^2+bx+c$ i $a>0$. Wtedy $f'(x)=2ax+b$, więc $f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{-b}{2a}$. W tym punkcie funkcja f osiąga minimum.
13. Przykład. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$. Wtedy $f'(x)=x^2-x=x(x-1)$.

x	$-\infty$	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	∞
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$



14. Wykres funkcji $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-1)}$



15. Link: **Badanie wykresu funkcji**. Zapoznajcie się dobrze z umieszcznym tam apletem. Na następnym kolokwium będzie zadanie polegające na zbadaniu przebiegu zmienności funkcji zadanej wzorem postaci $f(x)=\frac{b\cdot x^2+a\cdot x+1}{1-x^2}$, a więc takiej, której analiza przestawiona jest na tamtej stronie.

[09-12-2015] Pochodne

1. Równanie stycznej do funkcji f w punkcie a: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
2. Rozważania o paraboloidzie
3. Tw. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
4. Wniosek: $f'(ax+b) = af'(ax+b)$
5. Przykłady: $(\sqrt{(}1+x^2))' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $(x^2+1)^{100} = 100(1+x^2)^{99} \cdot 2 \cdot x$, ...
6. Tw. $(e^x)' = e^x$
7. Przebieg zmienności funkcji $f(x) = xe^{-x}$
8. Tw. (Bez dowodu) $(\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
9. Tw. $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
10. Oznaczenie: $\ln(x) = \log_e(x)$
11. Tw. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

[16-12-2015] Pochodne - c.d.

1. Tw. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. Tw. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
3. Tw. Jeśli $(\forall x \in (a,b))(f'(x) = 0)$, to istnieje stała C taka, że $(\forall x \in (a,b))(f(x) = C)$
4. Tw. Jeśli $(\forall x \in (a,b))(f'(x) = g'(x))$, to istnieje stała C taka, że $(\forall x \in (a,b))(f(x) = g(x) + C)$

Całka

1. Definicja: Jeśli $(\forall x \in [a,b])(f(x) \geq 0)$, to całką oznaczoną z funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy pole powierzchni obszaru

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} .$$

Powierzchnię tę oznaczamy symbolem $\int_a^b f(t)\, dt$.

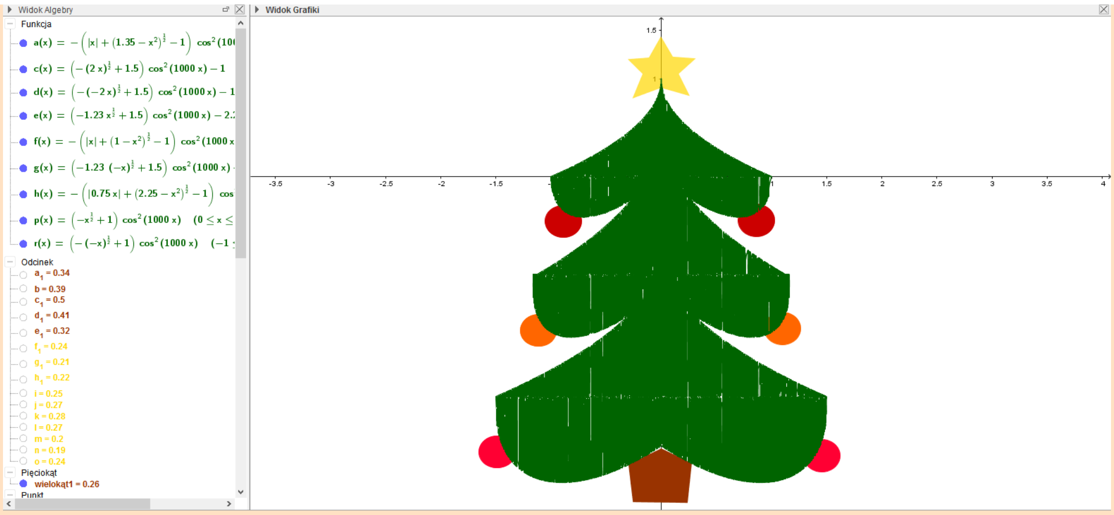
2. **Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Różniczkowego i Całkowego**: Jeśli f jest funkcją ciągłą, to dla każdego x mamy

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

5. Tw. Załóżmy, że $F'(x) = f(x)$. Wtedy $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.
6. Przykład: $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

Prezent świąteczny

Oto prezent śiąteczny, który otrzymałem od Pani Katarzyny Fojcik:



Całka - II

1. Jeśli $a < b < c$ to $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. Definicja: Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na odcinku (a, b) jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy$F'(x) = f(x)$.
4. Tw. Jeśli F jest **funkcją pierwotną** funkcji f to
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b \qquad (= F(b) - F(a)) \; .$$
5. Def. **Całką nieoznaczoną** fukcji f nazywamy rodzinę $\int f(x)dx$ wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f
6. Tw. $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
7. Lista podstawowych całek nieoznaczonych:
   - jeśli $a \neq -1$ to $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
   - $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C$
   - $\int e^x dx = e^x + C$
   - $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
   - $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
   - $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
   - $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
8. Całkowanie przez części: $\int f'gdx = f \cdot g - \int fg'dx$
9. Przykład:
$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$
10. Całkowanie przez podstawienie: **YouTube**, **YouTube from MIT**
11. Przykład: chcemy obliczyć $\int \sin(2x+1)dx$. Stosujemy podstawienie $u = 2x + 1$. Mamy $\frac{du}{dx} = 2$, co odczytujemy jako $du = 2dx$, czyli $dx = \frac{1}{2}du$. Zatem
$$\int \sin(2x+1)dx = \int \sin(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \sin(u)du = \frac{1}{2} \cdot (-\cos(u)) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$$

[13.01.2016] Całka - III

1. $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx = \ldots = \frac{1}{4}\pi R^2$.
2. Wniosek: koło o promieniu R ma pole πR^2.
3. Rozkład na ułamki proste: chcemy obliczyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x(3-x)}dx$.
   1. Szukamy takie A i B, że $\frac{1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x}$
   2. Po kilku krokach stwierdzamy, że takimi liczbami są $A = B = \frac{1}{3}$
   3. Liczymy
   $$\int_1^2 \frac{1}{x(3-x)}dx = \int_1^2 \frac{1}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x}dx = \int_1^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \ldots$$
4. Mamy funkcję ciągłą f na odcinku $[a,b]$. Ustalamy n. Rozbijamy $[a,b]$ na n odcinków długości $(b-a)/n$): definiujemy $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$.
   1. Definiujemy sumę dolną: $s_n(f;a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}\frac{b-a}{n}$
   2. Definiujemy sumę górną: $S_n(f;a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}\frac{b-a}{n}$
   3. Tw (bez dowodu): $\lim_{n\to\infty} s_n(f,a,b) = \lim_{n\to\infty} S_n(f,a,b)$
   4. Granicę $\lim_{n\to\infty} s_n(f,a,b)$ nazywamy całką oznaczoną funkcji f na przedziale $[a,b]$
5. Przykład: dla funkcji $f(x) = x$ mamy
$$s_n(f,0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(0+1+\ldots+(n-1)) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2},$$
   więc $\lim_{n\to\infty} s_n(f,0,1) = \ldots = \frac{1}{2}$.
6. Tw. Jesli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$ to objętość bryły $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$ wyraża się wzorem $\pi\int_a^b f^2(x)dx$.
7. Objętość kuli:
$$\pi\int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_{-R}^R (R^2-x^2)dx = \pi\left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^R = \ldots = \frac{4}{3}\pi R^3$$
8. Objętość stożka:
$$\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^h x^2dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.$$

[20.01.2016] Całka - IV

1. Wzór na długość łuku: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$
2. Liczmy długość krzywej zadanej wzorem $y = x^2$ dla $x \in [0,1]$:
   1. $L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx$ = $\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}dt$
   2. Teraz się bierzymy za wyliczenie całki $\int\sqrt{1+x^2}dx$
   3. Stosujemy podstawienie Eulera; $\sqrt{1+x^2} = t - x$
   4. Po kilkunastu krokach otrzymujemy $\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(|x+\sqrt{1+x^2}|))$
   5. Po podstawieniu przymujemy $L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right) \approx 1.47894$
3. Wzór na powierzchnię bryły obrotowej: $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

4. Powierzchnia kuli o promieniu R: $2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \ldots = 4\pi R^2$.
5. Przykłady całek, które nie wyrażają się przez funkcje elementarne: $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$, $\int \frac{1}{\ln(x)} dx$, $\int e^{-x^2} dx$.
6. Całkowanie numeryczne
7. Funkcja, która nie jest całkowalna w sensie Riemana:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbf{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbf{Q} \end{cases} .$$

Funkcja ta jest **całkowalna w sensie Lebesque'a**.

[27.01.2016] Ostatni wykład

Ostatni wykład będziecie mieli z prof. Michałem Morayne. Dowiecie się na nim o bardzo pożytecznej regule d'Hospitala (bardzo ułatwiającej liczenie granic) oraz o zastosowaniu drugich pochodnych do badania funkcji.